

# Math formula exercise

PENG GUANWEN

June 21, 2019

## Abstract

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 是一款非常优秀的文档准备系统，它强大的数学排版功能举世闻名。由于 Mathjax<sup>1</sup> 的广泛采用，L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 数学公式也成为了 Web 技术上数学公式排版的事实标准。但 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 的学习曲线陡峭，基本的命令难以轻松应对实际写作中遇到的复杂公式。本文选取并实现了 *The T<sub>E</sub>Xbook* 第 18 章末尾提供的 20 个 Challenge。以期为想要深入学习 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 公式排版的读者提供参考。

Knuth 在 *The T<sub>E</sub>Xbook* 的附录中给出了全部习题的答案，但全部使用的是原始的 T<sub>E</sub>X 命令，而本文则采用了适用于 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 的命令。为提供最大兼容性，本文原则上只使用 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 与  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$  宏集提供的命令排版数学公式。一个例外是 `commath` 宏包提供的 `\dif` 命令。但即使不引用这个宏包，也可以轻易地通过定义 `\DeclareMathOperator{\dif}{d!}` 来使用这个命令。

### Challenge 1 $n^{\text{th}}$ root

```
\(n^{\text{th}}\) root
```

`\textrm` 命令与 `\mathrm` 命令都可以在数学模式显示直的罗马体 “th”。在本例中效果也是一样的。但根据 *Math Mode*, `\mathrm` 是竖直字体的数学模式而 `\textrm` 是“真正的”文本模式，在这个公式下应该选择后者。

### Challenge 2 $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS} = \mathbf{dg}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \mathbf{\Lambda}$

```
\(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS}=\mathbf{dg}(\omega_1,\dots,\omega_n)=\mathbf{\Lambda}\)
```

与 Challenge 1 类似，本题中  $\mathbf{S}$  是粗体数学符号，所以采用 `\mathbf` 而不是 `\textbf`。

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 下直接使用 `\mathbf{\Lambda}` 不能得到正常的  $\mathbf{\Lambda}$  粗体效果，我们采用  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$  宏集的 `\boldsymbol` 命令完成。

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 数学模式有两种省略号 “...” 和 “...”，分别用 `\cdots` 和 `\ldots` 生成。 $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$  宏集提供了 `\dots`, `\dotsi`, `\dotsc`, `\dotsb`, `\dotssm`, `\dotso` 等命令，可以更方便灵活地使用这两种省略号。用法详见 *User's Guide for the amsmath package*, p14。

### Challenge 3 $\Pr(m = n \mid m + n = 3)$

```
\(\Pr(m=n \mid m+n=3)\)
```

---

<sup>1</sup><https://www.mathjax.org/>

`\mid` 与 `|`、`\lvert`、`\rvert` 都是显示为 | 的同一个字符。不同的是它们的语义不同，如 `\mid` 是一个关系符，而 `\lvert` 是一个左分隔符。这些语义能帮助 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 产生正确的空白。

*The T<sub>E</sub>Xbook* 认为这个式子可以与集合记号类比，在括号两侧添加窄空格。但我认为 `Pr` 还是应该被认为是一个函数，所以使用默认的空白方案。

**Challenge 4**  $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

```
\(\sin18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\)
```

`\frac` 的参数如果只有一个字符，可以直接省略大括号，以增加可读性。

**Challenge 5**  $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg}/^\circ\text{K}$

```
\(k=1.38\times10^{-16}\,\text{erg}/^\circ\text{K}\)
```

单位 `erg/°K` 与数字之间应该有一个窄空格`\,`。

**Challenge 6**  $\bar{\Phi} \subset NL_1^*/N = \bar{L}_1^* \subseteq \dots \subseteq NL_n^*/N = \bar{L}_n^*$

```
\(\bar{\Phi}\subset NL_1^*/N=\bar{L}_1^*\subseteq\dots\subseteq NL_n^*/N=\bar{L}_n^*\)
```

**Challenge 7**  $I(\lambda) = \iint_D g(x, y) e^{i\lambda h(x, y)} dx dy$

```
\(I(\lambda)=\iint_D g(x,y)e^{i\lambda h(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\)
```

在 *The T<sub>E</sub>Xbook* 中微分符号都是写作斜体的  $dx$ ，但根据 ISO 80000-2:2009(E)，应该采用竖直的罗马体。所以使用 `commath` 宏包的 `\dif` 命令以符合标准的要求。

**Challenge 8**  $\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

```
\(\int_0^1\dots\int_0^1 f(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n\)
```

*The T<sub>E</sub>Xbook* 认为应该在第一个积分符号后面插入一个负空格 `\!`。但我认为没有合适的排版上的理由这么做。

**Challenge 9**

$$x_{2m} \equiv \begin{cases} Q(X_m^2 - P_2 W_m^2) - 2S^2 & (m \text{ odd}) \\ P_2^2(X_m^2 - P_2 W_m^2) - 2S^2 & (m \text{ even}) \end{cases} \pmod{N}$$

```
\[x_{2m}\equiv\begin{cases} Q(X_m^2-P_2W_m^2)-2S^2&(m\text{ odd})\\ P_2^2(X_m^2-P_2W_m^2)-2S^2&(m\text{ even}) \end{cases}\pmod N\]
```

两行公式略显拥挤。如果采用 `mathtools` 宏包的 `\dcases` 将会取得更好的结果。

### Challenge 10

$$(1 + x_1z + x_1^2z^2 + \dots) \dots (1 + x_nz + x_n^2z^2 + \dots) = \frac{1}{(1 - x_1z) \dots (1 - x_nz)}$$

```

\[(1+x_1z+x_1^2z^2+\dots)\dots(1+x_nz+x_n^2z^2+\dots)=
\frac{1}{(1-x_1z)\dots(1-x_nz)}
\]

```

`\dots` 自动判断在这个例子中不起作用，所以需要语义化的版本 `\dotsb`。

*The T<sub>E</sub>Xbook* 在两处 “+…” 后面都增加了窄空格。

### Challenge 11

$$\prod_{j \geq 0} \left( \sum_{k \geq 0} a_{jk} z^k \right) = \sum_{n \geq 0} z^n \left( \sum_{\substack{k_0, k_1, \dots \geq 0 \\ k_0 + k_1 + \dots = n}} a_{0k_0} a_{1k_1} \dots \right)$$

```

\[\prod_{j \geq 0} \biggl( \sum_{k \geq 0} a_{jk} z^k \biggr) =
\sum_{n \geq 0} z^n \Biggl( \sum_{\substack{k_0, k_1, \dots \geq 0 \\ k_0 + k_1 + \dots = n}} a_{0k_0} a_{1k_1} \dots \Biggr)
\]

```

如果采用 `\left` 和 `\right` 自动调整括号高度，会设置为括号内部整个公式的高度，效果不令人满意。于是使用 `\Biggl` 和 `\Biggr` 手动调整大小。

*The T<sub>E</sub>Xbook* 在  $z^n$  后面增加了窄空格。

### Challenge 12

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_m)!}{n_1! n_2! \dots n_m!} = \binom{n_1 + n_2}{n_2} \binom{n_1 + n_2 + n_3}{n_3} \dots \binom{n_1 + n_2 + \dots + n_m}{n_m}$$

```

\[\frac{(n_1+n_2+\dots+n_m)!}{n_1!n_2!\dots n_m!}=
\binom{n_1+n_2}{n_2}\binom{n_1+n_2+n_3}{n_3}\dots
\binom{n_1+n_2+\dots+n_m}{n_m}
\]

```

L<sub>A</sub>T<sub>E</sub>X 不能很好的计算后缀运算符周围的空白，所以我们需要在  $n_2!$  前面插入一个窄空格。

### Challenge 13

$$\prod_R \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_M \\ b_1, b_2, \dots, b_N \end{matrix} \right] = \prod_{n=0}^R \frac{(1 - q^{a_1+n})(1 - q^{a_2+n}) \dots (1 - q^{a_M+n})}{(1 - q^{b_1+n})(1 - q^{b_2+n}) \dots (1 - q^{b_N+n})}$$

```

\[\Pi_R \genfrac[] {Opt} {} {
a_1, a_2, \dots, a_M
b_1, b_2, \dots, b_N
} = \prod_{n=0}^R \frac{
(1-q^{a_1+n})(1-q^{a_2+n}) \dots (1-q^{a_M+n})
}{
(1-q^{b_1+n})(1-q^{b_2+n}) \dots (1-q^{b_N+n})
}
\]

```

使用 `\genfrac` 可以生成向分数一样上下排列的两个公式，将第三个参数设置为零就可以取消掉中间的横线。

#### Challenge 14

$$\sum_{p \text{ prime}} f(p) = \int_{t>1} f(t) d\pi(t)$$

`\[\sum_{p\text{term}{ prime}}f(p)=\int_{t>1}f(t)\dif\pi(t)\]`

#### Challenge 15

$$\underbrace{\overbrace{a, \dots, a}^{k \text{ a's}}, \overbrace{b, \dots, b}^{l \text{ b's}}}_{k+l \text{ elements}}$$

`\[\{\underbrace{\overbrace{\mathstrut a,\dots,a}^{k;a\text{term}'s}},\overbrace{\mathstrut b,\dots,b}^{l;b\text{term}'s}}_{k+l\text{term}{ elements}}\}\]`

`\mathstrut` 等价于 `\vphantom{}`，这相当于插入了一个宽度为 0，但高度与一个括号相等的盒子，使得两边的大括号一样高。

#### Challenge 16

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

`\[\begin{pmatrix}x}a&b\c&d\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}e&f\g&h\end{pmatrix} \\ \noalign{\smallskip} 0 & \begin{pmatrix}i&j\k&l\end{pmatrix} \end{pmatrix}\]`

`\noalign{\smallskip}`用于增加两行之间的间距。

#### Challenge 17

$$\det \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_1 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} > 0$$

`\[\det\left|\begin{array}{*{5}{l}}c_0&c_1&c_2&\dots&c_n\\c_1&c_2&c_3&\dots&c_{n+1}\\c_2&c_1&c_4&\dots&c_{n+2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n}\end{array}\right|\]`

```

\,\vdots&\,\vdots&\,\vdots& &\,\vdots\\
c_n&c_{n+1}&c_{n+2}&\dots&c_{2n}
\end{array}\right|>0\]

```

为了实现对齐, 这里采用了 `array` 环境。`mathtools` 宏包提供了 `pmatrix*` 环境, 可以更方便地实现矩阵对齐。

### Challenge 18

$$\sum'_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{x \in A \\ x \neq 0}} f(x)$$

```

\[\mathop{\{\sum\}'}_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=}
\sum_{\substack{x \in A \\ x \neq 0}} f(x)\]

```

由于在数学模式中 ' 等价于 `^{\prime}`, 而巨算符会改变上标的位置, 所以直接采用 `\sum'_{x \in A}` 是不可行的。我们需要用 `\mathop` 临时制作一个新的巨算符。

### Challenge 19

$$2 \uparrow\uparrow k \stackrel{\text{def}}{=} 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}} \Big\}^k$$

```

\newcommand{\bottomalign}[1]%
{\genfrac{}{}{0pt}{}{#1}{} }
\{2\uparrow\uparrow k \stackrel{\text{def}}{=}
2^{\{2^{\{2^{\{\cdots^{\{\cdots^{\{\cdots^2\}}\}}\}}\}}\}}
\bottomalign{\Bigr}\} \scriptstyle k
\}

```

*The TeXbook* 采用了 `\vbox` 和 `\hbox` 的组合实现了大括号沿下侧对齐。而这里使用了 `\genfrac` 命令, 可以达到相同的效果, 同时兼容了 `Mathjax`。

### Challenge 20

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & \\
& & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{L} \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \pi_* \mathcal{O}_D & \xrightarrow{\delta} & R^1 F_* \mathcal{O}_V(-D) \longrightarrow 0 \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & R^1 F_*(\mathcal{O}_V(-iM)) \otimes \gamma^{-1} \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & 0
\end{array}$$

```

\[\begin{tikzcd}
& & & & 0 & & \\
& & & & \arrow[d] & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{L} \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \pi_* \mathcal{O}_D & \xrightarrow{\delta} & R^1 F_* \mathcal{O}_V(-D) \longrightarrow 0 \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & R^1 F_*(\mathcal{O}_V(-iM)) \otimes \gamma^{-1} \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & 0
\end{tikzcd}\]

```

```

\arrow[d,equal] & \mathcal{E} \arrow[r,"\rho"]
\arrow[d,"\phi"] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d,"\psi"]
& 0 \\\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_C \arrow[r] & \pi_*\mathcal{O}_D
\arrow[r,"\delta"] & R^1F_*\mathcal{O}_V(-D) \arrow[r]
\arrow[d]
& 0 \\\
& & R^1F_*(\mathcal{O}_V(-iM))\otimes\gamma^{-1} \arrow[d] & \\\
& & 0 &
\end{tikzcd}
\]

```

这个交换图在 *The T<sub>E</sub>Xbook* 是用矩阵实现的。但利用宏包 `tikz-cd`, 可以更方便, 灵活地绘制交换图。

## Unusual math command

`\,`, 2  
`\Bigg`  
    `\Biggl`, 3  
    `\Biggr`, 3  
`\boldsymbol`, 1  
`\circ`, 2  
`\dif`, 2  
`\dots`, 1  
    `\dotsb`, 3  
`\genfrac`, 4  
`\left`, 5  
`\mathbf`, 1  
`\mathop`, 5  
`\mathstrut`, 4  
`\mid`, 2  
`\noalign{\smallskip}`, 4  
`\pmod`, 2  
`\right`, 5  
`\textrm`, 1  
`\vert`  
    `\lvert`, 2  
    `\rvert`, 2  
    `|`, 2

## References

- [1] ISO 80000-2:2009(E). Quantities and units – Part 2: Mathematical signs and symbols to be used in the natural sciences and technology. Standard, International Organization for Standardization, December 2009. URL: <https://www.iso.org/standard/31887.html>.
- [2] Donald Ervin Knuth. *The T<sub>E</sub>Xbook*. Addison-Wesley Professional, January 1984.
- [3] American Mathematical Society and L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 3 Project. *User's Guide for the amsmath package*. December 13, 1999. URL: <http://mirrors.concertpass.com/tex-archive/macros/latex/required/amsmath/amslatex/amsldoc.pdf>.
- [4] Herbert Voß. *Math Mode*. January 2014. URL: <http://ctan.math.utah.edu/ctan/tex-archive/obsolete/info/math/voss/mathmode/Mathmode.pdf>.